

1. NEJISTOTY MĚŘENÍ

1.1 PŘESNOST A CHYBY MĚŘENÍ A PŘÍSTROJŮ

V praxi nejsou žádná měření, žádná měřicí metoda ani žádný přístroj absolutně přesné. Nejrůznější negativní vlivy, které se v reálném měřicím procesu vyskytují, se projeví odchylkou mezi naměřenou a skutečnou hodnotou sledované veličiny. Výsledek měření se tak vždy pohybuje v jistém „tolerančním poli“ kolem skutečné hodnoty, ale téměř nikdy nenastává ideální ztotožnění obou hodnot. Přiblížení se k nulové velikosti odchylky vytváří velké potíže i u realizace etalonů. Výsledný rozdíl mezi oběma hodnotami je někdy tvořen i velmi složitou kombinací dílčích faktorů.

Dosud bylo zvykem při vyhodnocování souborů naměřených hodnot pracovat s chybami. Nově je vyhodnocování prováděno prostřednictvím vyjádření nejistot měření. Připomeňme si nyní stručně základy teorie chyb, aby je bylo možné lépe porovnat s novou koncepcí nejistot, která koncepci chyb nahrazuje.

Chyby se vyjadřují v absolutních nebo relativních hodnotách. Podle jejich působení lze chyby rozdělit na systematické, náhodné a hrubé. Podle svého zdroje se rozdělují na chyby přístroje, metody, pozorování a vyhodnocení.

Jako **chyba absolutní** Δ_y se označuje rozdíl mezi hodnotou naměřenou y_m a skutečnou x_s . Podělíme-li absolutní chybu skutečnou hodnotou, dostaneme poměrné vyjádření chyby, tj. chybu relativní δ_x . Platí tedy

$$\Delta_y = y_m - x_s \quad (2.1)$$

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{x_s} = \frac{y_m - x_s}{x_s} \quad (2.2)$$

Systematické chyby jsou při stálých podmínkách také stále co do velikosti i znaménka a svým působením systematicky ovlivňují výsledek měření. Ke stanovení jejich velikosti postačí zpravidla vztah (2.1). Z hlediska uživatele měřicí techniky jsou systematické chyby sympatické tím, že je lze z velké části určit a jejich vliv je možné zmenšit, např. pomocí korekcí, kompenzací apod. Takto se zpravidla podaří odstranit podstatnou část jejich negativního vlivu na měření, ale zůstane ještě zbytek, který lze označit jako nevyložené (nevyučitelné) systematické chyby. Právě toto je jedna z oblastí, kterou mnohem lépe postihuje nový koncept nejistot měření.

Náhodné chyby působí zcela nahodile, jsou těžko předvídatelné a nelze je vyloučit. Při opakování měření se mění jejich velikost i znaménko, jak odpovídá předpokládanému zákonu rozdělení. Pro určení jejich velikosti se vychází z opakovaných měření s použitím statistických metod, odpovídajících patřičnému pravděpodobnostnímu modelu, reprezentovanému zákonem rozdělení příslušné náhodné chyby. V praxi velmi často jde o rozdělení normální – Gaussovo, které se používá ve většině aplikací.

Výsledek měření, stanovený ze souboru opakovaných měření realizovaných za stejných podmínek, je reprezentován aritmetickým průměrem získaným při n opakováních z hodnot $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$, tj.

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.3)$$

Náhodnou chybu v klasické teorii chyb nejčastěji zastupuje směrodatná odchylka výběrového souboru s , méně často směrodatná odchylka aritmetického průměru s_x , získané ze vztahu

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{y_i}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \quad (2.4)$$

$$s_{\bar{y}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \quad (2.5)$$

Obě směrodatné odchylky patřičným způsobem blíže charakterizují chování náhodných chyb.

Hrubé chyby jsou z předchozího pohledu zcela nevyzpytatelné. Měření zatížené hrubou chybou znehodnotí celý experiment, a proto naměřené hodnoty, které výrazně „vybočují z řady“, což bývá velmi často projevem tohoto druhu chyby, se vyloučí z dalšího zpracování. Omezit riziko jejich výskytu lze důsledným dodržováním příslušných měřicích postupů, podmínek měření a pozorností obsluhy.

Výsledná chyba měření je vyjadřována jako součet systematické a náhodné složky, což lze zapsat

$$\Delta_x = e + \varepsilon \quad (2.6)$$

a její maximální hodnotu je možné odhadnout jako

$$\Delta_{y_{\max}} = (\bar{y} - y_s) + 2s \quad (2.7)$$

kde

$$\begin{aligned} e = \bar{y} - y_s & \quad \text{systematická složka} \\ \varepsilon = s, \text{ popř. } \varepsilon = 2s & \quad \text{náhodná složka} \end{aligned}$$

Součinitel rozšíření směrodatné odchylky souvisí s pravděpodobností pokrytí intervalu a typem rozdělení. Dvojka u Gaussova rozdělení přísluší často užívané 95% pravděpodobnosti.

Přesnost přístroje je definována jako schopnost udávat za stanovených podmínek pravou hodnotu měřené veličiny. Pravou hodnotou měřené veličiny přitom rozumíme hodnotu, která charakterizuje veličinu dokonale definovanou za podmínek existujících v okamžiku jejího zjištění. Chyby přístrojů jsou způsobeny nedokonalostmi použitých měřicích prostředků, které mohou vznikat ve výrobě, montáži, popř. i opotřebením. Svou roli sehrává i změna charakteristik a parametrů přístroje v čase (stárnutí).

Třída přesnosti T_p měřicího přístroje vyjadřuje maximální relativní chybu přístroje vztaženou na rozpětí přístroje

$$T_p = \frac{\Delta y_{\max}}{y_{\max} - y_{\min}} \cdot 100 \quad (2.8)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta y & \quad \text{maximální přípustná absolutní chyba přístroje,} \\ y_{\max} - y_{\min} & \quad \text{měřicí rozpětí přístroje.} \end{aligned}$$

Vypočtená třída přesnosti se zaokrouhlila směrem nahoru na nejbližší hodnotu upravené řady R5, tedy: 4 -2,5 -1,6 - 1,0 - 0,6 - 0,4 - 0,25 - 0,16 - 0,1 - atd.

Dalším zdrojem chyb je nevhodná instalace nebo uložení (ustavení) přístroje na pracovním místě, stole apod. Chyby metody mají svůj původ v nedokonalosti, či zjednodušení použité měřicí metody.

Chyby pozorování, nebo spíše pozorovatele, jsou do měření vnášeny jako chyby osobní, zapříčiněné buď nedokonalostí smyslů pozorovatele, nebo jeho nesoustředěností. Chyby, mající svůj původ ve vyhodnocení, jsou časté jako výpočtové, vznikající v důsledku aplikování přibližných vztahů, zjednodušení, ale také použitím linearizace, interpolace, extrapolace, zaokrouhlování, nedostatečným vyčíslením konstant apod.

2. NEJISTOTY MĚŘENÍ

2.1 POPIS NEJISTOT MĚŘENÍ

Nejistoty měření se stanovují při vyhodnocování měření ve výzkumu a technické praxi a to při:

1. experimentálním ověřování fyzikálních zákonů a určování hodnot fyzikálních konstant,
2. definičních měřeních, reprodukci jednotek fyzikálních a technických veličin a vyhodnocování metrologických vlastností primárních etalonů,
3. kalibraci sekundárních etalonů a pracovních (provozních) měřidel,
4. typových zkouškách měřidel a vyhodnocování jejich technických a metrologických vlastností,
5. vyhodnocování přesných měření v oblasti zkušebnictví a kontroly jakosti výrobků,
6. úředních měřeních ve smyslu zákona o metrologii,
7. ostatních přesných a závazných měřeních v technické praxi, např. přejímacích a garančních zkouškách, měření množství látek a energií v hospodářském styku, měření složení a vlastností materiálů apod.

Nejistota měření charakterizuje rozsah naměřených hodnot okolo výsledku měření, který lze zdůvodněně přiřadit k hodnotě měřené veličiny. Nejistota měření se týká nejen výsledku měření, ale i měřicích přístrojů, hodnot použitých konstant, korekcí apod., na kterých nejistota výsledku měření závisí. Základem určování nejistot měření je statistický přístup. Předpokládá se určité rozdělení pravděpodobnosti, které popisuje, jak se může udávaná hodnota odchýlovat od skutečné hodnoty, resp. pravděpodobnost, s jakou se v intervalu daném nejistotou může nacházet skutečná hodnota.

Mírou nejistoty měření je směrodatná odchylka udávané veličiny. Takto vyjádřená nejistota se označuje jako **standardní nejistota $-u$** a představuje rozsah hodnot okolo naměřené hodnoty. Standardní nejistoty se dělí na standardní nejistoty typu A a typu B. Udávají se buď samostatně bez znaménka, nebo za hodnotou výsledku se znaménkem \pm .

Standardní nejistoty typu A - u_A jsou způsobovány náhodnými chybami, jejichž příčiny se považují všeobecně za neznámé. Stanovují se z opakovaných měření stejné hodnoty měřené veličiny za stejných podmínek. Tyto nejistoty se stoupajícím počtem opakovaných měření se zmenšují. Přitom se předpokládá existence náhodných chyb s normálním rozdělením.

Standardní nejistoty typu B - u_B jsou způsobovány známými a odhadnutelnými příčinami vzniku. Jejich identifikaci a základní hodnocení provádí experimentátor. Jejich určování nebývá vždy jednoduché. U složitých měřicích zařízeních a při zvýšeném požadavku na přesnost, musí se provést podrobný rozbor chyb, což vyžaduje značné zkušenosti. Tyto nejistoty vycházejí z různých zdrojů a výsledná nejistota typu B je dána jejich sumací - přitom nezávisí na počtu opakovaných měření.

Kombinovaná standardní nejistota $-u_C$ je sumací nejistot typu A a B. Hodnotí-li se výsledek měření touto nejistotou, není třeba rozlišovat nejistoty typu A a B. Kombinovaná standardní nejistota udává interval, ve kterém se s poměrně velkou pravděpodobností může vyskytovat skutečná hodnota měřené veličiny. V praxi se dává této nejistotě přednost.

Rozšířená standardní nejistota U se zavádí v případě, že je třeba zajistit ještě větší pravděpodobnost správného výsledku měření. Získá se tak, že se kombinovaná standardní nejistota u_C vynásobí součinitelem $k_u = 2$.

Při zjišťování jednotlivých standardních nejistot se postupuje podle toho, zda se jedná o přímé nebo nepřímé měření jedné nebo více veličin. Při výpočtech se hodnoty koeficientů a nejistot zaokrouhluje na tři platné číslice. Udávaná výsledná nejistota se zaokrouhluje na dvě platné číslice.

2.2 Zdroje nejistot

Jako zdroje nejistot lze označit veškeré jevy, které nějakým způsobem mohou ovlivnit neurčitost jednoznačného stanovení výsledku měření, a tím vzdalují naměřenou hodnotu od hodnoty skutečné. Značnou roli zde sehrává také skutečnost, zda jde o měřicí metody přímé nebo nepřímé. Na nejistoty působí výběr měřicích přístrojů analogových nebo číslicových, použití různých filtrů, vzorkovačů a dalších prostředků v celé trase přenosu a úpravy měřicího signálu. K nejistotám velmi výrazně přispívají rušivé vlivy prostředí v tom nejširším slova smyslu.

Vyjmenovat zde veškeré možné zdroje nejistot nelze, takže se pokusme uvést alespoň ty, které se vyskytují nejčastěji:

1. nedokonalá či neúplná definice měřené veličiny nebo její realizace,
2. nevhodný výběr přístroje (rozlišovací schopnost aj.)
3. nevhodný (nereprezentativní) výběr vzorků měření,
4. nevhodný postup při měření
5. zjednodušení (zaokrouhlení) konstant a převzatých hodnot,
6. linearizace, aproximace, interpolace anebo extrapolace při vyhodnocení,
7. neznámé nebo nekompensované vlivy prostředí,
8. nedodržení shodných podmínek při opakovaných měřeních,
9. subjektivní vlivy obsluhy,
10. nepřesnost etalonů a referenčních materiálů

Některé ze zdrojů se projevují výhradně, či výrazněji v nejistotách vyhodnocovaných nejistotou typu A, jiné při použití nejistoty typu B. Mnohé zdroje ale mohou být příčinou obou skupin nejistot, a zde právě číhá největší nebezpečí v podobě opomenutí jedné ze složek, což může mít i velmi výrazný zkreslující účinek.

2.2.1 STANDARDNÍ NEJISTOTA u_A - PŘÍMÉ MĚŘENÍ JEDNÉ VELIČINY

Odhad údaje y měřené veličiny je dán výběrovým průměrem \bar{y} z n -naměřených hodnot y_i podle vztahu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (2.9)$$

Odhad rozptylu naměřených hodnot, označovaný jako výběrový rozptyl $s^2(y_i)$ se určí ze vztahu

$$s^2(y_i) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \quad (2.10)$$

Odmocninou výběrového rozptylu se získá výběrová směrodatná odchylka $s(y_i)$, která charakterizuje rozptyl naměřených hodnot kolem výběrového průměru \bar{y} .

Rozptyl výběrových průměrů $s^2(\bar{y})$ se určí ze vztahu

$$s^2(\bar{y}) = \frac{s^2(y_i)}{n} \quad (2.11)$$

Směrodatná odchylka výběrových průměrů $s(\bar{y})$ je zvolena za standardní nejistotu typu A, tedy

$$u_A \equiv s(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n \cdot (n-1)}} \quad (2.12)$$

Pokud je počet opakovaných měření menší než deset a není možné učinit kvalifikovaný odhad na základě zkušenosti, určí se korigovaná nejistota u_{Ak} ze vztahu

$$u_{Ak} = k \cdot s(\bar{y}), \quad (2.13)$$

kde

k koeficient závislý na počtu opakovaných měření, jak je uvedeno v tab.2.1.

Tab.2.1: Hodnoty korekčních koeficientů pro různé počty opakovaných měření.

n	9	8	7	6	5	4	3	2
k	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

2.2.2 STANDARDNÍ NEJISTOTA u_B - PŘÍMÉ MĚŘENÍ JEDNÉ VELIČINY

Postup při zjišťování standardní nejistoty typu B je následující:

Vytypují se možné zdroje nejistot Z_j ; jsou jimi např. nedokonalé měřicí přístroje, použité měřicí metody, nepřesné hodnoty konstant, způsob vyhodnocování a někdy i malé zkušenosti pracovníků v laboratoři. Odhadne se rozsah odchylek $\pm \Delta Z_{\max}$ od jmenovité hodnoty tak, aby jeho překročení bylo málo pravděpodobné. Dále se odhadne, jakému rozdělení pravděpodobnosti odpovídají odchylky ΔZ v intervalu $\pm \Delta Z_{\max}$ a určí nejistoty u_z ze vztahu $u_z = \Delta Z_{\max} / m$. Hodnota m závisí na druhu rozdělení: $m = 2$ pro normální, $m = 1,73$ pro rovnoměrné a $m = 2,45$ pro trojúhelníkové rozdělení. Určí se standardní nejistoty u_z těchto zdrojů (např. převzetím hodnot nejistot z technické dokumentace jako jsou certifikáty, kalibrační listy, technické normy, údaje výrobců, technické tabulky apod.) a přepočítají na složky nejistoty měřené veličiny - u_{zj} .

Výsledná standardní nejistota typu B se vypočítá ze vztahu

$$u_B = \sqrt{\sum_{j=1}^m u_{zj}^2} \quad (2.14)$$

2.2.3 KOMBINOVANÁ STANDARDNÍ NEJISTOTA u_C - PŘÍMÉ MĚŘENÍ

Tato nejistota se určí ze vztahu

$$u_C = \sqrt{(u_A^2 + u_B^2)} \quad (2.15)$$

2.2.4 STANDARDNÍ NEJISTOTA u_A - NEPŘÍMÉ MĚŘENÍ

Když je zjišťována výsledná hodnota veličiny V nepřímým měřením, tzn. že se přímo měří veličiny X_j a parametry P_h , které veličinu vyjadřují vztahem

$$V = f(X_j, P_h) \quad (2.16)$$

je výsledkem měření hodnota $\bar{v} = F(\bar{x}_j, p_h)$, kde \bar{x}_j jsou výběrové průměry jednotlivých měřených veličin a p_h jsou hodnoty parametrů P_h .

Velikost standardní nejistoty u_A se určí ze vztahu

$$u_A^2 \equiv s(\bar{y})^2 = \sum_{j=1}^m A_{x_j}^2 \cdot s(\bar{x}_j)^2 + 2 \sum_{j=2}^m A_{x_j} \cdot A_{x_k} \cdot s(\bar{x}_j) \quad (2.17)$$

kde

A_{x_j} a A_{x_k} převodové koeficienty aktuálních hodnot x a p .

2.2.5 STANDARDNÍ NEJISTOTA u_B - NEPŘÍMÉ MĚŘENÍ

Základní postup je stejný jako při přímém měření.

2.3 UDÁVÁNÍ NEJISTOT

Údaje o nejistotách musí obsahovat formulace a zápis výsledných hodnot, způsobu výpočtu a nutné informace o pramenech.

Výpočet nejistot je neoddelitelnou částí zpracování výsledků měření. Nejistoty musí být specifikovány. Při udávání rozšířené nejistoty musí být uveden použitý koeficient rozšíření (k), popř. odpovídající konfidenční pravděpodobnost. Lze udávat jak absolutní, tak i relativní nejistoty, popř. oboje. Hodnoty nejistot se zásadně zaokrouhlují na dvě platná místa a to přednostně nahoru.

Je třeba také uvádět odkazy na použité normativní dokumenty. Některé tyto dokumenty přímo předepisují náležitosti a formulace při udávání výsledků měření včetně nejistot.

Do certifikátů o kalibraci se uvádí výsledek měření s rozšířenou nejistotou ve formě $(y \pm U)$ s následujícím dodatkem: "Uvedená nejistota představuje dvě směrodatné odchylky. Směrodatná odchylka byla vypočtena z nejistoty měřicího etalonu, kalibračních metod, vnějších vlivů, krátkodobého vlivu kalibrovaného objektu ..."

2.4 PŘÍKLADY VÝPOČTU NEJISTOT

PŘÍKLAD 1: (Kalibrace odporového snímače teploty)

Stanovte nejistoty u_A , u_B , u_C a U při kalibraci přesného odporového snímače teploty s platinovým měřicím odporem Pt 100 při teplotě 150 °C v olejové lázni.

Standardní nejistota u_A byla určena z devíti měření hodnot měřicího odporu R_t při stanovené teplotě - viz Tab. 2.1...

Tab. 2.1 Naměřené hodnoty

i	$R_{ii} (\Omega)$	$\Delta R_{ii} (m\Omega)$	$\Delta R_{ii}^2 (m\Omega^2)$
1	157,311	- 4	16
2	157,313	- 2	4
3	157,318	+ 3	9
4	157,320	+ 5	25
5	157,318	+ 3	9
6	157,314	- 1	1
7	157,313	- 2	4
8	157,312	- 3	9
9	157,316	+1	1
n = 9	$\Sigma = 1415,835$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 78$

Výběrový průměr \bar{R}_i z naměřených hodnot odporu snímače R_{ii} se určí ze vztahu (2.9):

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{i=1}^9 R_{ii}}{9} = \frac{1415,835}{9} = 157,315 \Omega$$

a standardní nejistota u_A ze vztahu (2.12):

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 \Delta R_{ii}^2}{9 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{78}{72}} = 1,041 \text{ m}\Omega$$

a převedeno na teplotu $u_A = 2,83 \text{ mK}$

Protože bylo naměřeno pouze devět hodnot, je třeba korigovat nejistotu koeficientem z tab.2.1, který je roven $k = 1,2$:

$$u_{Ak} = k \cdot u_A = 1,2 \cdot 1,041 = 1,249 \text{ m}\Omega, \text{ resp. } u_{Ak} = 3,318 \text{ mK.}$$

Standardní nejistota u_B je vnášena do měření změnami fyzikálních podmínek, jako např. kolísáním teploty lázně, napájecího napětí apod. Zdroji nejistot Z_j a jejich standardní nejistoty z_j pro uvedený příklad jsou:

1. Měřicí most - maximální odchylka 2 mΩ, tj. 5 mK;
2. Napájecí zařízení tj. vliv měřicího proudu - maximální odchylka 300 mK;
3. Vliv odvodu tepla snímačem - maximální odchylka 50 mK;
4. Vliv teplotního gradientu v lázni - maximální odchylka 200 mK;
5. Přepínač měřících míst - maximální odchylka 100 mK;
6. Nejistota ověření etalonového snímače 50 mΩ, tj. 130 mK.

Standardní nejistota u_B se určí ze vztahu

$$u_B = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{u_{z_j}}{m} \right)^2}$$

Vzhledem k uvažovanému rovnoměrnému rozdělení pravděpodobnosti se volí $m = \sqrt{3} = 1,732$.

Potřebné hodnoty pro výpočty jsou uvedeny v následující tabulce Tab. 2.3.

Tab. 2.3 Hodnoty pro výpočet nejistot

j	z_j (mK)	u_{z_j} (mK)	$u_{z_j}^2$ (mK ²)
1	5	2,89	8,35
2	300	173,21	30001,70
3	50	28,87	823,48
4	200	115,47	13333,32
5	100	57,74	3333,91
6	130	75,06	5634,00
$\sum_{m=6}$	785	453,24	53144,76

Standardní nejistota typu B bude rovna $u_b = \sqrt{53144,76} = 230,53$ mK.

Kombinovaná standardní nejistota u_C se vypočítá ze vztahu (1.41):

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{3,318^2 + 230,53^2} = \sqrt{53155,09} = 230,554 \text{ mK}$$

Rozšířená standardní nejistota U se vypočte ze vztahu

$$U = k_u \cdot u_C = 2 \cdot 230,554 = 461,11 \text{ mK.}$$

Rekapitulace: Standardní nejistota typu A $u_A = 3,32$ mK
 Standardní nejistota typu B $u_B = 230,53$ mK
 Kombinovaná standardní nejistota $u_C = 230,55$ mK
 Rozšířená standardní nejistota $U = 461,11$ mK.

PŘÍKLAD 2: (Měření prosté teploty)

Pro jednoduchost se předpokládá měření teploty např. v místnosti, a to běžným skleněným lihovým teploměrem, na který nepůsobí jiné než pro daný případ zanedbatelné negativní vlivy (vliv vyčnívajících vláken, sálání, proměnná teplota okolí, změny proudění v místnosti apod.). Přesnost teploměru je zadána jako chyba odečítání o velikosti jednoho dílku stupnice, tj. $\pm 1^\circ\text{C}$.

Přesnost je zde zadána „klasicky“ prostřednictvím chyby, tedy nikoliv jako nejistota, jak by bylo vhodnější či jak lze předpokládat, že bude v příštích letech vyžadováno. Aby byla zachována názornost celé analýzy nejistot podle popisu v předchozích dílech cyklu, může teplota měřena opakovaně na několika místech tak, aby bylo možné stanovit průměrnou teplotu v místnosti. Předpokladem takového experimentu ovšem je, že teplotní pole v měřeném prostoru je dostatečně homogenní. Je-li tato podmínka splněna a není důvod uvažovat ještě nějaké další přidavné korekce, je postup např. následující.

Opakovaným měřením, při dostatečné době ustálení údaje teploměru (aby nevznikla přidavná dynamická chyba), se získá potřebných deset naměřených hodnot (tab. 1).

Odhadem průměrné teploty \bar{t} je aritmetický průměr ze všech deseti naměřených hodnot: $\bar{t} = 24,5^\circ\text{C}$.

Standardní nejistota typu A je reprezentována směrodatnou odchylkou souboru naměřených hodnot od aritmetického průměru:

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,270^\circ\text{C}$$

Standardní nejistota typu B má při daném zjednodušení jediný zdroj, kterým je chyba odečítání s hodnotou $\pm 1^\circ\text{C}$. Za oprávněného předpokladu rovnoměrného pravouhlého rozdělení platí

$$u_B(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,578^\circ\text{C}$$

Standardní nejistota kombinovaná se získá sloučením obou složek

$$u_C(t) = \sqrt{u_A^2(t) + u_B^2(t)} = \sqrt{0,270^2 + 0,578^2} = 0,638^\circ\text{C}$$

Tab. 2.4 Naměřené hodnoty teploty v místnosti

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Údaj teploměru t_i ($^\circ\text{C}$)	25	24	25	23	24	25	26	24	25	24

Výsledek měření si zaslouží zcela jistě prezentaci pomocí nejistoty rozšířené s koeficientem rozšíření $k_r = 2$ (skutečná průměrná teplota se nachází v intervalu nejistoty s asi 95% pravděpodobností), takže zápis nabude formy $t = (24,50 \pm 1,28)^\circ\text{C}$ (při zaokrouhlení na dvě platná místa).

Zejména s ohledem na přijatá zjednodušení vyžaduje tento příklad několik poznámek:

1. Jde o postup ne právě obvyklý. Jednak se předpokládá poměrně nesnadno dosažitelná (a prokazatelná) homogenita teplotního pole, jednak je u takto jednoduchých úloh dosti neobvyklé měření tolikrát opakovat. V praxi byl počet opakování spíše menší a při analýze by se s výhodou využilo i zkušeností z dřívějších měření.
2. Významným problémem při měření teploty je dynamika. Teploměry, zvláště zde uvažovaný skleněný, se vyznačují relativně velkou časovou konstantou, takže je nebezpečí vzniku že je nebezpečí vzniku přídavné dynamické chyby. Této složce chyby při měření se lze vyhnout, ale je třeba dlouho čekat na ustálení údaje měřidla, přičemž se doba měření prodlužuje, často neúměrně.
3. Při kalibraci teploměru by bylo nejen třeba zvážit dodržení podmínek kalibrace, ale při kolísání teploty okolního prostředí i zahrnout do analýzy změny způsobené změnou rozměrů kapiláry a stupnice teploměru v závislosti na teplotě, stejně jako vliv změn součinitele objemové roztažnosti lihu a součinitelů délkové roztažnosti stupnice a skla kapiláry s teplotou.

PŘÍKLAD 2: (Měření rozdílu teplot)

Opět se předpokládá použití běžného skleněného lihového teploměru, tentokrát např. k měření teploty vody v systému horkovodního vytápění. Nejjednodušším případem může být použití teploměru ve stonkovém provedení, o kterém lze předpokládat, že byl dostatečně přesně kalibrován právě pro ponoření celého stonku. Opět se neuvažují žádné nezanedbatelné negativní vlivy na měření. Přesnost teploměru je ale již zadána ve formě rozšířené nejistoty $U(t) = 1,2^\circ\text{C}$ pro $k_r = 2$ platné po celé délce stupnice teploměru. Jde tedy o případ nejistoty konstantní v celém měřicím rozsahu přístroje.

Dále se předpokládá, že daný teploměr bude použit v prostředí s parametry nevyžadujícími přídavné korekce ani zahrnutí odchylek parametrů prostředí do zdrojů nejistot. Je-li takový teploměr použit pro měření teploty vody v potrubí tak, že je poměřen právě celou délkou svého stonku, jak odpovídalo i podmínkám, v nichž byl kalibrován (a byla stanovena jeho výsledná rozšířená nejistota), lze předpokládat, že každá naměřená hodnota, tedy i jednotlivé měření, bude stanovena s danou hodnotou rozšířené nejistoty $U(t) = 1,2^\circ\text{C}$, popř. kombinované nejistoty standardní $u_C(t) = 0,60^\circ\text{C} = c$.

Až potud se jedná o situaci zcela běžnou. Jisté komplikace mohou nastat, je-li daný teploměr použit k měření rozdílu teplot, což je nejčastěji měření např. na jakýchkoliv výměnících tepla. Je-li úkolem stanovit nejistotu rozdílu dvou teplot $t_{\text{rozd}} = t_1 - t_2$, celá situace se komplikuje nutností zahrnout kovarianční vlivy. Je totiž nutné brát v úvahu maximální korelaci obou naměřených hodnot s chybou přístroje při součiniteli korelace $r=1$. Jestliže se bude měřit každá z teplot jiným teploměrem (zpravidla

z téže dodávky od jednoho výrobce), nemusí být chyba obou teploměrů zcela stejná. Protože v tomto případě kovariance způsobená společnou chybou zmenšuje výslednou nejistotu, lze předpokládat, že společná část chyby je nulová (použije se nulová hodnota kovariance), aby nedošlo k vylepšení výsledné nejistoty. V případě součtu teplot by bylo třeba naopak uvažovat celou chybu u obou teploměrů jako stejnou, protože kovariance zvětšuje výslednou nejistotu a výsledek by tentokrát byl nadlepšen jejím zanedbáním (viz také dále).

Pro výslednou nejistotu rozdílu teplot teoreticky platí:

$$u_C^2(t_{\text{rozd}}) = u^2(t_1) + u^2(t_2) - u(t_1)u(t_2)$$

Kovariance je uvažována v intervalu hodnot 0 až c^2 . Aby nedošlo k neoprávněnému nadlepšení výsledné nejistoty, dosadí se v tomto speciálním případě do součinného členu $u(t_1)u(t_2)$ hodnota kovariance 0, a nikoliv c . Výsledná nejistota tedy je

$$u_C(t_{\text{rozd}}) = \sqrt{c^2 + c^2 - 0} = \sqrt{0,36 + 0,36} = \sqrt{0,72} = 0,85^\circ\text{C}$$

a při součiniteli rozšíření $k_r=2$ bude rozšířená nejistota $U(t_{\text{rozd}})=1,70^\circ\text{C}$.

Je-li tedy např. vstupní teplota $t_1=(65\pm 1,2)^\circ\text{C}$ a výstupní $t_2=(58\pm 1,2)^\circ\text{C}$, je výsledný rozdíl teplot $t_{\text{rozd}}=(7\pm 1,7)^\circ\text{C}$.

Také příklad měření rozdílu teplot si zaslouží několik poznámek:

1. Podobně jako při měření rozdílu by měla být volena kovariance rovná 0 i při určování nejistoty podílu dvou teplot. Naopak pro součet nebo součin by ze stejného důvodu (aby nedošlo k nadlepšení výsledné nejistoty) měla být volena hodnota kovariance na horní hranici intervalu, tj. c^2 .
2. Jestliže se vyskytne součet (součin) dvou teplot podle předchozí poznámky, celá situace se změní tak, že za jinak stejných podmínek pro součet teplot $t_1=(25\pm 1,2)^\circ\text{C}$ a $t_2=(18,5\pm 1,2)^\circ\text{C}$ nabude výsledná standardní kombinovaná nejistota hodnoty:

$$u_C(t_{\text{součet}}) = \sqrt{c^2 + c^2 + c^2} = \sqrt{0,36 + 0,36 + 0,36} = \sqrt{1,08} = 1,04^\circ\text{C}$$

Hodnota kovariance je tentokrát použita všude na horní hranici intervalu (předpoklad společné chyby se volí i v případě použití dvou teploměrů, které spojuje např. společný výrobce a typ). Zanedbání nebo zmenšení kovariance by mohlo neopodstatněně nadlepšit výslednou nejistotu. Výsledný součet obou teplot s intervalem rozšířené nejistoty (pro $k_r=2$) je $t_{\text{součet}}=(43,5\pm 2,08)^\circ\text{C}$.

3. Protože se jedná o jednoduchý případ rozdílu (součtu), jsou součinitele citlivosti jednotlivých nejistot rovny 1 ($A_i=1$). Kdyby byl funkční vztah představován složitější rovnicí, musela by analýza zahrnout i tyto součinitele.
4. Analogicky by mohla situace vypadat i při použití např. elektrického odporového teploměru v omezeném rozsahu „běžných teplot“. Ale zde by zřejmě byla hodnota nejistoty vázána na jinou hodnotu konstanty pro kladné a na jinou pro záporné teploty. Jestliže by byl odporový teploměr použit pro měření v širším rozsahu, mohla by se vyskytnout i jiná forma zadání nejistoty.